

# 究極の数学 IAIB 紹介教材

## 【受講を考えてくださっている皆様へ】

具体的にどのような問題を扱うかわかっていただいていた方が安心だと思うので、サンプル問題を提供します。1日目は「最大値・最小値」、2日目は「方程式・不等式」、3日目は「軌跡・領域」について扱います。

どの分野も入試で頻出の分野で、応用性も大変広いので、この分野を完璧にするだけで入試の  $\frac{1}{3}$  ほどは極めたと言っても過言ではないでしょう。この3日間で徹底的にやりましょう、解けない問題がなくなるくらい、極めましょう。

以下のトピックを見て、「面白そうだ!」と思ったあなた、「あれ、解けないぞ?」と思ったあなた、教室でお会いしましょう。今後の数学の勉強が変わるような3日間になることを願っています。(塩崎 ひかる)

## こんなトピックを扱います

### 1. 最大値・最小値

みなさん、こんな問題は(当然?)解いたことがありますよね?

実数  $x, y$  が  $2x + y = 1$  を満たしているとき、 $x^2 + xy + y^2$  のとりうる値の範囲を求めよ。

「 $y$  を消去して2次関数かな…」などと思いついた人はきちんとお勉強していて素晴らしいと思います。では、これも考えることができますか?

実数  $x, y$  が  $x^2 + xy + y^2 = 1$  を満たしているとき、 $2x + y$  のとりうる値の範囲を求めよ。

さっきの問題には手が出たのに、これになるとパタッと手が止まってしまうあなた、1日目の講義でお会いしましょう。

### 2. 方程式・不等式

こんな問題はよくありますね。

直線  $y = ax$  と放物線  $y = x^2 - 4x + 6$  がただ1つの共有点を持つとき、 $a$  の値を求めよ。

「舐めるんじゃないよ、てやんでい」というレベルです。消去して判別式なり煮ても焼いても美味しくいただけませんが…

$0 \leq x < 2\pi$  において2つの曲線  
 $y = a \sin x, y = \cos x + 2$

がただ1つの共有点を持つとき、 $a$  の値を求めよ。

こうなってしまうと途端に毒入りりんごに見えてしまうあなた、2日目の講義でお会いしましょう。

### 3. 軌跡・領域

次の問題はできて欲しいところです。

点  $(x, y)$  が原点を中心とする半径1の円の内部を動くとき、点  $(x+y, x-y)$  の動く範囲を図示せよ。

あまり難しく考えなくても、 $X = x + y, Y = x - y$  より  $x = \frac{X+Y}{2}, y = \frac{X-Y}{2}$  ですから、これを  $x^2 + y^2 < 1$  に代入すれば答えを得ます。でもでも…

点  $(x, y)$  が原点を中心とする半径1の円の内部を動くとき、点  $(x^2 + y^2, xy)$  の動く範囲を図示せよ。

こうなったら、あれ… $X = x^2 + y^2, Y = xy$  とおくと、 $x^2 + y^2 < 1$  より  $X < 1$  が答えですか…?

この質問に答えられないあなた、3日目の講義でお会いしましょう。

### 4. 最後に

本講義は決して「ハイレベルな」「技巧的な」ものを学ぶ場ではありません。基礎原理を大切にして「基礎的で」「本質的な」ものを学ぶ場です。しかし、基礎的であることは数学的に易しいとは限りません。いつしか入試数学が俯瞰できるようになっていることでしょう。